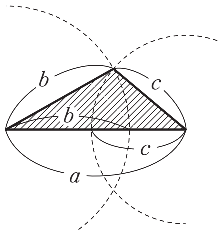
第８講　三角比と平面図形⑴

【基礎確認事項】

［１］　三角形の辺と角



□三角形の 3 辺の長さについて，次のことが成り立つ．
2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さよりも大きい．
つまり，3 辺の長さ a，b，c について，次の関係が成り立つ．

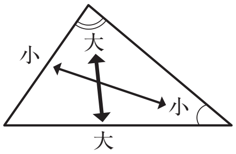
$$b+c>a,\quad c+a>b,\quad a+b>c$$

□第 2 式より　$a>b-c$ であり，第 3 式より　$a>c-b$ である．
よって以下のことがいえる．

> a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在する条件は　$|b-c|<a<b+c$

つまり，三角形のある 1 辺は，他の 2 辺の長さの差より大きく，和よりも小さい．
また，a が最大辺の場合は，その長さは他の 2 辺の差より大きいことは当然であるため，
三角形の成立条件は $a<b+c$ のみとなる．

□三角形の辺と角の大小関係について，以下のことがいえる．



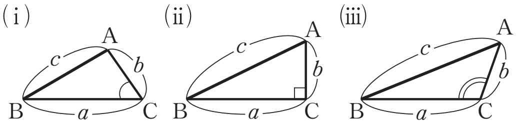
> 三角形においては 2 辺の大小関係とその対角 2 つの
> 大小関係が一致する．

このことより，

> 鈍角三角形においては，鈍角の対辺が最大辺であり，最大辺の対角が鈍角である．

さらに，三角形の辺と角の関係について，以下のことがいえる．

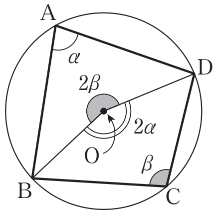
> (i)　$a^2+b^2>c^2 \iff \angle$C は鋭角
> (ii)　$a^2+b^2=c^2 \iff \angle$C は直角
> (iii)　$a^2+b^2<c^2 \iff \angle$C は鈍角



⇒　C&U 1

［２］　円の性質と正弦定理

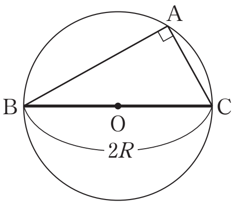
□右図において，$\angle$BAD$=\alpha$，$\angle$BCD$=\beta$ とすると，
円の中心角は円周角の 2 倍であるので　$2\alpha+2\beta=360°$
よって　$\alpha+\beta=180°$　である．つまり，円に内接する
四角形の内角の和は 360° である．



□三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円**，中心を**外心**という．

□△ABC の外接円の半径を R とする．

$A=90°$ のとき
BC は円の直径より
$a=2R$ である．



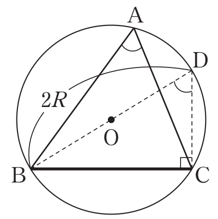
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき

右図のように頂点Bを通る直径BDを考えると

$\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ$，$\mathrm{BD} = 2R$，$\angle \mathrm{D} = \angle \mathrm{A}$ より

$\mathrm{BC} = \mathrm{BD}\sin D$　つまり　$a = 2R\sin A$　である．



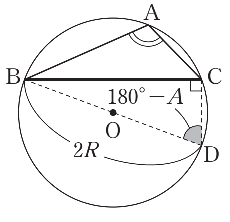
$90^\circ < A < 180^\circ$ のとき

右図のように頂点Bを通る直径BDを考えると

$\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ$，$\mathrm{BD} = 2R$，$\angle \mathrm{D} = 180^\circ - \angle \mathrm{A}$ より

$\sin D = \sin(180^\circ - A) = \sin A$

よって　$\mathrm{BC} = \mathrm{BD}\sin D$　つまり　$a = 2R\sin A$　である．



$\sin 90^\circ = 1$ より，$A = 90^\circ$ のときも　$a = 2R\sin A$ と表せる．

以上より，△ABCの外接円の半径を R とすると　$a = 2R\sin A$　すなわち

$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$　が成り立つ．B，C についても同じように考えると，任意の △ABC について次の公式が成り立つ．

正弦定理

△ABCの外接円の半径を R とすると　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

⇒　C&U 2

［3］　余弦定理

□△ABCにおいて，

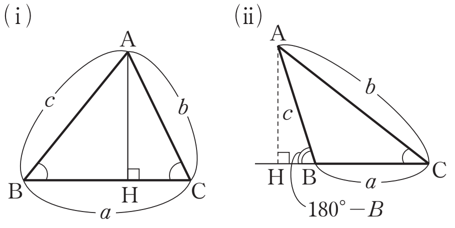
$a = c\cos B + b\cos C$　……①　が成り立つ．

これは右図において

(i)のとき　$\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\cos B + \mathrm{AC}\cos C$

(ii)のとき　$\mathrm{BC} = \mathrm{CH} - \mathrm{HB} = \mathrm{AC}\cos C - \mathrm{AB}\cos(180^\circ - B) = \mathrm{AC}\cos C + \mathrm{AB}\cos B$

より導かれる．



同様に　$b = a\cos C + c\cos A$　……②　　$c = a\cos B + b\cos A$　……③　が成り立つ．

$\angle A = 90^\circ$ の直角三角形のときは，三平方の定理により　$a^2 = b^2 + c^2$　が成り立つ．

□ここでは一般の三角形について考えよう．

①×a より　$a^2 = ac\cos B + ab\cos C$

②×b＋③×c より　$b^2 + c^2 = (ab\cos C + bc\cos A) + (ac\cos B + bc\cos A)$

$= ac\cos B + ab\cos C + 2bc\cos A$

よって　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　が成り立つ．また，この式より　$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

が成り立つ．B，C についても同じように考えると，任意の △ABC について次の公式が成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

余弦定理

△ABC において

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \iff \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \iff \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \iff \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

⇒　C&U 3

[4]　三角形の面積

□△ABC において，2 辺の長さとそれらにはさまれる角の大きさがわかると，その面積を求めることができる．

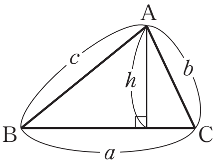
辺 BC を底辺とするときの高さ h は

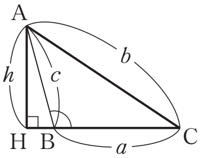
$$h=c\sin B$$

となる．よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h=\frac{1}{2}ac\sin B$$

となる．一般に，次の公式が成り立つ．





△ABC の面積 S

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \qquad S=\frac{1}{2}ca\sin B \qquad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

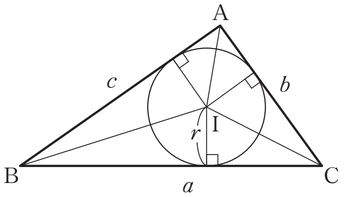
□三角形の 3 辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円**，中心を**内心**という．

□右の図のように △ABC の内心を I，内接円の半径を r とすると，円の半径と接線はその接点において直交することにより，三角形の面積は

$$\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$$

$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

となる．したがって，次のことが成り立つ．



△ABC の内接円の半径 r と面積 S について

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

また，$a+b+c=2s$ とすると

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　**(ヘロンの公式)**　が成り立つ．

⇒　C&U 4

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　次の長さの線分を 3 辺とする三角形は存在するかどうかを調べよ．また存在する場合は，その三角形が鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか答えよ．

(1)　3，4，6　　(2)　9，10，12

(3)　5，12，13　　(4)　5，10，16

2　△ABC において，外接円の半径を R とする．次のものを求めよ．

(1)　$a=4$，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$ であるとき，b および R

(2)　$a=5\sqrt{3}$，$R=5$ のとき　A

3　△ABC において，次のものを求めよ．

(1)　$a=3$，$b=5$，$C=120^\circ$ のとき　c

(2)　$a=1$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ のとき　B

(3)　$a=4$，$b=\sqrt{13}$，$B=60^\circ$ のとき　c

4　次の △ABC の面積を求めよ．

(1)　$b=5$，$c=8$，$A=30^\circ$　　(2)　$a=7$，$b=5$，$c=3$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　三角比と平面図形(1)

1　△ABC において BC＝a，CA＝b，AB＝c とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ のとき，最大角の大きさを求めよ．

(2)　次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ．

$$(a - c\cos B)\sin B = (b - c\cos A)\sin A$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　鋭角三角形 ABC において BC＝a，CA＝b，AB＝c とする．$a=\sqrt{3}$，$b:c=(1+\sqrt{3}):2$，外接円の半径が 1 であるとき，b，c の値および角 A，B，C の大きさを求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　△ABC において，AB＝7，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝5 のとき，次の問いに答えよ．

(1)　△ABC の面積 S を求めよ．

(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ．

［2］　円 O に内接する四角形 ABCD において，AB＝2，BC＝3，CD＝1，∠ADC＝120° を満たす．このとき次の問いに答えよ．

(1)　AC の長さを求めよ．

(2)　AD の長さを求めよ．

(3)　円 O の半径を求めよ．

(4)　四角形 ABCD の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　三角比と平面図形(1)

円 O に内接する四角形 ABCD において，BC＝8，CD＝5，DA＝3，∠BCD＝60° である．このとき，BD＝ ア ，AB＝ イ ，円 O の半径は $\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である．

また △ABD の内接円の半径を r とすると，$r=\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　三角比と平面図形(1)

【CHECK & UP】

1 (1)　最大辺の大きさは 6 である．

$(4-3<)6<3+4$ より　3，4，6 を 3 辺とする三角形は**存在する**．

また，$6^2=36$，$3^2+4^2=25$ より　$3^2+4^2<6^2$ であるから，この三角形は**鈍角三角形**である．

(2)　最大辺の大きさは 12 である．

$(10-9<)12<9+10$ より　9，10，12 を 3 辺とする三角形は**存在する**．

また，$12^2=144$，$9^2+10^2=181$ より　$9^2+10^2>12^2$ であるから，この三角形は**鋭角三角形**である．

(3)　最大辺の大きさは 13 である．

$(12-5<)13<5+12$ より　5，12，13 を 3 辺とする三角形は**存在する**．

また，$13^2=169$，$5^2+12^2=169$ より　$5^2+12^2=13^2$ であるから，この三角形は**直角三角形**である．

(4)　最大辺の大きさは 16 である．

$16>5+10$ より　5，10，16 を 3 辺とする三角形は**存在しない**．

「三角形がある」というように明確に存在が保証されているならば，三角形が存在するかの検証は通常は必要ない．大切なのは，三角形の 3 辺の中で，「鈍角になる資格があるのは最大辺の対角ただ 1 つ」ということ．よって，3 辺のうち最大辺に注目することが，三角形の形状を知り，自分で図示するときに役に立つのである．

　最大辺が明確であればそれをベースに三角形の存在や角が鈍角か否かがすぐにわかるが，そうでない場合は，ある辺が他の 2 辺の「差より大きく和より小さい」ことを立式する必要がある．もちろん，各辺が正であることは言うまでもない．

　また，最大辺がわからないまでも，一番長くはなれない辺，つまり「最大辺になり得ない」辺も把握しておくとよい．その対角は確実に鋭角である．

2 (1)　正弦定理より　$\dfrac{b}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}$

つまり　$\dfrac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

よって　$b=4\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

また正弦定理より　$2R=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}$

よって　$R=\dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

(2)　正弦定理より　$2\cdot5=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin A}$

よって　$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\mathbf{A=60^\circ,\ 120^\circ}$

(1)　正弦定理の利用の基礎練習である．分数の分母や分子にさらに分数が入る場合がある．分子の場合はそのまま下ろせばいいが，分母の場合は逆数にして掛け算にする．ただし，方程式の性質を使って「分母を払った場合」は，払った分母がそのままもう一方にくる．(1)の 2 行目では「$\sqrt{2}$」が逆数になった例であり，「$\frac{\sqrt{3}}{2}$」が払われて移ってきた例である．今回の主役は「b」であるため，「$\frac{\sqrt{3}}{2}$」を払って右辺にそのまま移動させたのである．

　また，外接円の半径 R については，対角・対辺の関係にあるもののうち，どれか 1 つのペアの比を使う．また，方程式であるから両辺を「割る」ということに注意を払っておくとよい．

(2)　外接円の半径 R がわかっていることも多い．その場合は，それを 2 倍したものとどれか 1 ペアの比を＝で結ぶ．立式したあと，今回は両辺を 5 で割り，さらに主役である「$\sin A$」を「払って」そのまま左辺へ，逆にいらない「2」を「割って」右辺へもっていった．sin の値により鋭角と鈍角の 2 つが出てきた．そのことによって内角の和が 180° をオーバーしてしまうことのないように．また，明らかに最大辺でないのにその対角が鈍角になることのないように．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1)　余弦定理より

$$c^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos120^\circ$$
$$=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$$

$c>0$ より　$\boldsymbol{c=7}$

(1)　2辺夾角（2辺とその間の角）型の余弦定理の練習．最もオーソドックスな形の1つである．もっとも注意すべきポイントの1つは，「鈍角」のときは「cos の値がマイナス」であること．余弦定理の公式のマイナスとあわせてプラスになることを練習によってたたき込んでおくとよい．

(2)　余弦定理より

$$\cos B=\frac{1^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot1\cdot\sqrt{2}}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$\boldsymbol{B=135^\circ}$

(2)　3辺型の余弦定理もまた頻出の形である．cos の値がマイナスなら鈍角．(2)で B を調べる問題であるが，b が最大辺なのでその対角である B の大きさを調べるのは合理的．ただし，いつでも角度が明確に出るとは限らないが．

(3)　余弦定理より

$$(\sqrt{13})^2=c^2+4^2-2\cdot c\cdot4\cdot\cos60^\circ$$
$$c^2-4c+3=0\qquad よって\quad \boldsymbol{c=1,\ 3}$$

(3)　2辺と「その間ではない角」に関する問題．b と B がともにわかっているため「正弦定理」の利用も可能であるが，直接 c が出ない（$A\to C\to c$ の順）ため今回の問題の解法としては適さない．

4 (1)　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{10}$

(2)　余弦定理より　$\cos A=\frac{25+9-49}{2\cdot5\cdot3}=\frac{-15}{2\cdot5\cdot3}=-\frac{1}{2}$

このとき　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$

【別解】　$s=\frac{1}{2}(7+5+3)=\frac{15}{2}$ とすると

$$\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\left(\frac{15}{2}-7\right)\cdot\left(\frac{15}{2}-5\right)\cdot\left(\frac{15}{2}-3\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{15\cdot1\cdot5\cdot9}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$$

三角比の知識を用いることにより，三角形の面積は「2辺とその間の角」により求められる．(2)のように3辺の長さがわかっている場合も，余弦定理により角度（の三角比）が求められ，それにより面積を求めることができる．もちろんヘロンの公式も有効であるが，(2)のように「3辺の和が偶数にならない」場合は計算に少々手間がかかることがある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　三角比と平面図形(1)

1　△ABC において BC＝a，CA＝b，AB＝c とする．次の問いに答えよ．
(1)　$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ のとき，最大角の大きさを求めよ．
(2)　次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ．
$$(a-c\cos B)\sin B=(b-c\cos A)\sin A$$

(1)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

つまり　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$

同様に　$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

よって　$\sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{a}{2R}:\dfrac{b}{2R}:\dfrac{c}{2R}=a:b:c$　より $a:b:c=3:5:7$

したがって，$a=3k$，$b=5k$，$c=7k$　$(k>0)$ とおける．

c が最大辺より，C が最大角である．よって，余弦定理より

$$\cos C=\frac{9k^2+25k^2-49k^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=\frac{-15k^2}{2\cdot 3\cdot 5k^2}=-\frac{1}{2}$$　ゆえに最大角 C の大きさは **120°**

(2)　△ABC の外接円の半径を R とすると，

$(a-c\cos B)\sin B=(b-c\cos A)\sin A$　より正弦定理・余弦定理を用いて

$$\left(a-c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)\cdot\frac{b}{2R}=\left(b-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot\frac{a}{2R}$$

$$\frac{2a^2-(c^2+a^2-b^2)}{2a}\cdot b=\frac{2b^2-(b^2+c^2-a^2)}{2b}\cdot a$$

$$(a^2+b^2-c^2)b^2=(a^2+b^2-c^2)a^2$$

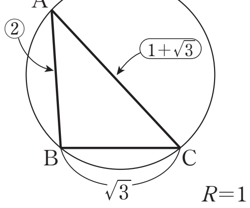
$$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$a+b>0$ より　$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

したがって，**BC＝AC の二等辺三角形　または　∠C＝90° の直角三角形**

2　鋭角三角形 ABC において BC＝a，CA＝b，AB＝c とする．$a=\sqrt{3}$，$b:c=(1+\sqrt{3}):2$，外接円の半径が１であるとき，b，c の値および角 A，B，C の大きさをを求めよ．



正弦定理より　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A}=2\cdot 1$　　$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A は鋭角より **$A=60°$**

また，$b:c=(1+\sqrt{3}):2$ より

$b=(1+\sqrt{3})k$，$c=2k$　$(k>0)$ とおける．

余弦定理より　$3=\{(1+\sqrt{3})k\}^2+(2k)^2-2\cdot(1+\sqrt{3})k\cdot 2k\cdot\cos 60°$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

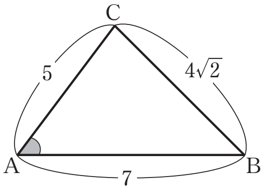
$6k^2=3\qquad k^2=\dfrac{1}{2}\qquad k>0$ より　$k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$b=(1+\sqrt{3})\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$，$c=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{2}}$

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}=2\cdot1\qquad \sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C は鋭角より　$\boldsymbol{C=45^\circ}$

よって　$\boldsymbol{B=75^\circ}$

3 ［1］　△ABC において，AB＝7，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝5 のとき，次の問いに答えよ．
　(1)　△ABC の面積 S を求めよ．
　(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ．



(1)　余弦定理より　$\cos A=\dfrac{49+25-32}{2\cdot7\cdot5}=\dfrac{42}{2\cdot7\cdot5}=\dfrac{3}{5}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

したがって，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\dfrac{4}{5}=\mathbf{14}$

【別解】　$s=\dfrac{1}{2}(7+4\sqrt{2}+5)=6+2\sqrt{2}$　とおくと，ヘロンの公式により

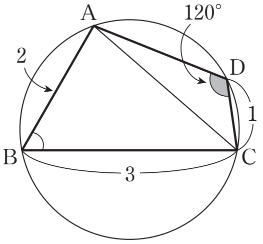
$$\begin{aligned}S&=\sqrt{s(s-7)(s-4\sqrt{2})(s-5)}\\&=\sqrt{(6+2\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})}\\&=\sqrt{(36-8)(8-1)}=\sqrt{28\cdot7}\\&=\mathbf{14}\end{aligned}$$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ より

$14=\dfrac{1}{2}r(7+4\sqrt{2}+5)\qquad (6+2\sqrt{2})r=14\qquad r=\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{7(3-\sqrt{2})}{9-2}=\mathbf{3-\sqrt{2}}$

3 ［2］　円 O に内接する四角形 ABCD において，AB＝2，BC＝3，CD＝1，
∠ADC＝120° を満たす．このとき次の問いに答えよ．
　(1)　AC の長さを求めよ．
　(2)　AD の長さを求めよ．
　(3)　円 O の半径を求めよ．
　(4)　四角形 ABCD の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



(1)　$\angle \mathrm{ABC}=180°-\angle \mathrm{CDA}=60°$

よって △ABC について余弦定理より

$$\mathrm{AC}^2=4+9-2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 60°=4+9-6=7$$

したがって　$\mathbf{AC}=\sqrt{\mathbf{7}}$

(2)　$\mathrm{AD}=x$ とおくと，△ACD について余弦定理より

$$7=1+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 120°$$

$x^2+x-6=0$　　$(x+3)(x-2)=0$　　$x=-3,\ 2$　　よって　$\mathbf{AD}=\mathbf{2}$

(3)　円 O の半径を R とすると，△ABC について正弦定理より

$$2R=\frac{\sqrt{7}}{\sin 60°}\qquad \text{よって}\quad R=\frac{\sqrt{7}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\mathbf{21}}}{\mathbf{3}}$$

(4)　(四角形 ABCD)＝△ABC＋△ACD

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin 60°+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot \sin 120°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　三角比と平面図形(1)

円Oに内接する四角形ABCDにおいて，BC＝8，CD＝5，DA＝3，∠BCD＝60°である．このとき，BD＝[ア]，AB＝[イ]，円Oの半径は $\dfrac{[\text{ウ}]\sqrt{[\text{エ}]}}{[\text{オ}]}$ である．

また△ABDの内接円の半径を r とすると，$r=\dfrac{\sqrt{[\text{カ}]}}{[\text{キ}]}$ である．

△BCDで余弦定理より

$$BD^2=64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\cos60^\circ=64+25-40=49$$

したがって　BD＝**7**

∠BAD＝180°－∠BCD＝120°

AB＝x とおくと，△ABDで余弦定理より

$$49=9+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\cos120^\circ$$

$$x^2+3x-40=0$$

$$(x+8)(x-5)=0 \qquad x=-8,\ 5$$

よって　AB＝**5**

円Oの半径を R とすると，△BCDで正弦定理より

$$2R=\frac{7}{\sin60^\circ}$$

よって　$R=\dfrac{7}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$

△ABDの面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

また，△ABDの内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(AB+BD+DA)$$

よって　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}r(5+7+3)$

したがって　$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。